Μιγαδικές Συναρτήσεις 1 - Φεβρουάριος 2025

Διάρκεια 3 Ώρες

Θέμα 1 [1 μον.]

(α) Γράψτε τον αριθμό e^{z^i} σε αλγεβρική και πολική μορφή, αν είναι γνωστό ότι $z = \sqrt{\frac{\pi}{8}}(1+i)$.

(β) Βρείτε όλες τις ρίζες της εξίσωσης $e^z = i$.

Θέμα 2 [1 μον.]

(α) Έστω μια συνάρτηση $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Να δώσετε τον ορισμό του ορίου $\lim_{x\to\infty} f(z) = \infty$.

(β) Να δώσετε τον ορισμό της εκθετικής συνάρτησης και να αποφανθείτε αν ισχύει $\lim_{x\to\infty} e^z = \infty$.

Θέμα 3 [1.5 μον.]

(α) Έστω μια συνάρτηση $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Να δώσετε τον ορισμό της συνέχειας της f στο σημείο $z_0 = 0$.

(β) Να δώσετε γεωμετρικά - περιγραφικά τον ορισμό της συνάρτησης του κυρίου ορίσματος $\mathrm{Arg}(\cdot)\colon \mathbb{C}^* \to (-\pi, \pi]$ και αιτιολογήστε γιατί αυτή η συνάρτηση δεν μπορεί να επεκταθεί με συνεχή τρόπο στο $z_0 = 0$.

Θέμα 4 [1.5 μον.]
Δίνεται η συνάρτηση $g(z) = z^2, z \in \mathbb{C}$.

(α) Να δώσετε τον ορισμό της μιγαδικής παραγώγου μιας συνάρτησης $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ σε ένα σημείο $z_0 \in \mathbb{C}$. Εξετάστε με χρήση του ορισμού, αν η g είναι ακέραια.

(β) Να γράψετε τη g ως διανυσματικό πεδίο $(u, v)\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ και με χρήση αυτού να δείξετε ότι η g είναι μιγαδικά διαφορίσιμη σε κάθε σημείο $z \in \mathbb{C}$. Επίσης, να δώσετε την παράγωγο της g σε κάθε σημείο της.

Θέμα 5 [2.5 μον.]

(α) Να δώσετε τον ορισμό της συνάρτησης του συνημιτόνου στους μιγαδικούς ως δυναμοσειράς με κέντρο το 0 και δώστε, με αιτιολόγηση, το μέγιστο πεδίο σύγκλισής της.

(β) Είναι αυτή η συνάρτηση ολόμορφη; Πως μπορείτε να υπολογίσετε την παράγωγό της;

(γ) Δίνεται η συνάρτηση $f(z) = \dfrac{\cos z - 1}{z^2},\ z \in \mathbb{C}^*$. Μπορεί ή f να επεκταθεί ολόμορφα πάνω από το σημείο $z_0 = 0$; Ποια η τιμή της επέκτασης αυτής στο $z_0 = 0$; Τι είδους ανωμαλία παρουσιάζει η f στο σημείο $z_0 = 0$;

Θέμα 5 [2 μον.]
Διατυπώστε και αποδείξτε το Θεώρημα Liouville.

ΚΑΛΗ ΤΥΧΗ!!